Aufgabe O.2

Man bestimme diejenigen reelen Zahlen **a**, für die die Determinante **0** wird.

$$\begin{vmatrix} (a-1) & a & 2 & (3-a) \\ a+3 & 2 & 4 & a \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ a & (-1) & (a-3) & (2-a) \end{vmatrix}$$

Lösung:

Wir berechnen die Dermenante von dem Matrix und entwickeln nach der 3 Zeile
4 1 3 1

$$4\times\begin{vmatrix} a & 2 & (3-a) \\ 2 & 4 & a \\ (-1) & (a-3) & (2-a) \end{vmatrix} -$$
$$1\times\begin{vmatrix} (a-1) & 2 & (3-a) \\ (a+3) & 4 & a \\ a & (a-3) & (2-a) \end{vmatrix} +$$
$$3\times\begin{vmatrix} a & 2 & (3-a) \\ 2 & 4 & a \\ (-1) & (a-3) & (2-a) \end{vmatrix} -$$
$$1\times\begin{vmatrix} (a-1) & 2 & (3-a) \\ (a+3) & 4 & a \\ a & (a-3) & (2-a) \end{vmatrix}$$

Jetzt wenden wir die Regel von Sarrus an:

$$4 \times \left|\begin{array}{ccc|cc} a & 2 & (3-a) & a & 2 \\ 2 & 4 & a & 2 & 4 \\ (-1) & (a-3) & (2-a) & (-1) & (a-3) \end{array}\right. \quad 4\times\left(\begin{array}{l} (a \times 4 \times (2-a)) + (2 \times a \times (-1)) + \\ ((3-a) \times 2 \times (a-3)) - ((3-a)\times 4\times(-1)) - \\ (a\times a\times(a-3)) - (2\times 2\times(2-a)) \end{array}\right)$$

$$1 \times \left|\begin{array}{ccc|cc} (a-1) & 2 & (3-a) & (a-1) & 2 \\ (a+3) & 4 & a & (a+3) & 4 \\ a & (a-3) & (2-a) & a & (a-3) \end{array}\right. \quad 1\times\left(\begin{array}{l} ((a-1)\times 4\times(2-a)) + (2 \times a \times a) + \\ ((3-a) \times (a+3) \times (a-3))-((3-a)\times 4\times a) - \\ ((a-1)\times a\times(a-3)) - (2\times(a+3)\times(2-a)) \end{array}\right)$$

$$3 \times \left|\begin{array}{ccc|cc} a & 2 & (3-a) & a & 2 \\ 2 & 4 & a & 2 & 4 \\ (-1) & (a-3) & (2-a) & (-1) & (a-3) \end{array}\right. \quad 3\times\left(\begin{array}{l} ((a-1)\times 2\times(2-a)) + (a \times a \times a) + \\ ((3-a) \times (a+3) \times (-1))-((3-a)\times 2\times a) - \\ ((a-1)\times a\times(-1)) - (a\times(a+3)\times(2-a)) \end{array}\right)$$

$$1 \times \left|\begin{array}{ccc|cc} (a-1) & a & 2 & (a-1) & a \\ (a+3) & 2 & 4 & (a+3) & 2 \\ a & (-1) & (a-3) & a & (-1) \end{array}\right. \quad 1\times\left(\begin{array}{l} ((a-1)\times 2\times(a-3)) + (a \times 4 \times a) + \\ (2 \times (a+3) \times (-1))-(2\times 2\times a) - \\ ((a-1)\times 4\times(-1)) - (a\times(a+3)\times(a-3)) \end{array}\right)$$

$$4\times((8a-4a^2)+(-2a)+(12a-18-2a^2)-(-12+4a)-(a^3-3a^2)-(8-4a))-$$
$$1\times((12a-4a^2-8)+2a^2+(9a-27-a^3+3a^2)-(12a-4a^2)-(a^3-4a^2+3a)-(12-2a-2a^2))+$$
$$3\times((6a-2a^2-4)+a^3+(a^2-9)-(6a-2a^2)-(a-a^2)-(6a-a^3-a^2))-$$
$$1\times((2a^2-8a+6)+4a^2+(-2a-6)-4a-(-4a+4)-(a^3-9a))$$
$$=$$
$$4\times(8a-4a^2-2a+12a-18-2a^2+12-4a-a^3+3a^2-8+4a)-$$
$$1\times(12a-4a^2-8+2a^2+9a-27-a^3+3a^2-12a+4a^2-a^3+4a^2-3a-12+2a+2a^2)+$$
$$3\times(6a-2a^2-4+a^3+a^2-9-6a+2a^2-a+a^2-6a+a^3+a^2)-$$
$$1\times(2a^2-8a+6+4a^2-2a-6-4a+4a-4-a^3+9a)$$
$$=$$
$$4\times(18a-3a^2-14-a^3)-$$
$$1\times(8a+11a^2-47-2a^3)+$$
$$3\times(-13+2a^3+3a^2-7a)-$$
$$1\times(6a^2-a-4-a^3)$$
$$=$$
$$72a-12a^2-56-4a^3-8a-11a^2+47+2a^3-39+6a^3+9a^2-21a-6a^2+a+4+a^3$$
$$=\ 44a-20a^2+5a^3-44$$

Lösen der kubischen Gleichung $5a^3-20a^2+44a-44$

Die kubische Gleichung wird zunächst durch Division mit 5 auf die Normalform
$x^3 + rx^2 + sx + t = 0$ gebracht.

$$x^3 - 4x^2 + 8{,}8x - 8{,}8 = 0$$

Durch die Substitution $x = y - r/3$ wird die Gleichung in eine reduzierte Form
$y^3 + py + q = 0$ gebracht, in der kein quadratisches Glied mehr auftritt.

$$(y + 1{,}3333333333333333)^3 - 4(y + 1{,}3333333333333333)^2 + 8{,}8(y + 1{,}3333333333333333) - 8{,}8 = 0$$

Die neuen Koeffizienten können bequemer auch direkt berechnet werden:

$p = s - r^2/3 = 3{,}4666666666666677$
$q = 2r^3/27 - rs/3 + t = -1{,}807407407407407$

$$y^3 + 3{,}4666666666666677y - 1{,}807407407407407 = 0$$

Aus der Gleichung liest man also ab:

$p = 3{,}4666666666666677$ $\qquad$ $q = -1{,}807407407407407$

Nun muß der Wert $R = (q/2)^2+(p/3)^3$ betrachtet werden.

Ist $R > 0$, so hat die kubische Gleichung eine reelle und zwei komplexe Lösungen,
ist $R = 0$, hat sie drei reelle Lösungen, von denen zwei zusammenfallen,
und im Falle $R < 0$ drei verschiedene reelle Lösungen.

Für die ersten beiden Fälle verwendet man die Lösungsformel von Cardano/Tartaglia,
im dritten Fall, dem sogenannten "casus irreducibilis", löst man mithilfe
trigonometrischer Funktionen.

Im Falle dieser Gleichung ist R = 2,3597037037037047.

Da R nicht negativ ist, kann die Gleichung mit der Cardanischen Formel gelöst werden:

T = sqr((q/2)²+(p/3)³) = sqr(R) = 1,536132710316301

u = kubikwurzel(-q/2 + T) = 1,346233012746734

v = kubikwurzel(-q/2 - T) = -0,858362218586412

y_1 = u + v = 0,48787079416032186

y_2 = -(u + v)/2 - ((u - v)/2)*sqr(3)·î = -0,24393539708016093 - 1,9092354753965355·î

y_3 = -(u + v)/2 + ((u - v)/2)*sqr(3)·î = -0,24393539708016093 + 1,9092354753965355·î

Die Substitution x = y - r/3 wird durch Subtraktion von r/3 rückgängig gemacht.
r=-4 ist der quadratische Koeffizient der kubischen Gleichung.
Damit ergeben sich, der Größe nach geordnet, diese Lösungen:

x_1 = 1,821204127493655

x_2 = 1,0893979362531725 - 1,9092354753965355·î

x_3 = 1,0893979362531725 + 1,9092354753965355·î