Aufgabe O.2

Man bestimme diejenigen reelen Zahlen **a**, für die die Determinante **0** wird.

$$\begin{vmatrix} (a-1) & a & 2 & (3-a) \\ a+3 & 2 & 4 & a \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ a & (-1) & (a-3) & (2-a) \end{vmatrix}$$

Lösung:

Wir berechnen die Dermenante von dem Matrix und entwickeln nach der 3 Zeile

4 1 3 1

$$4\times\begin{vmatrix} a & 2 & (3-a) \\ 2 & 4 & a \\ (-1) & (a-3) & (2-a) \end{vmatrix}+$$
$$1\times\begin{vmatrix} (a-1) & 2 & (3-a) \\ (a+3) & 4 & a \\ a & (a-3) & (2-a) \end{vmatrix}+$$
$$3\times\begin{vmatrix} a & 2 & (3-a) \\ 2 & 4 & a \\ (-1) & (a-3) & (2-a) \end{vmatrix}+$$
$$1\times\begin{vmatrix} (a-1) & 2 & (3-a) \\ (a+3) & 4 & a \\ a & (a-3) & (2-a) \end{vmatrix}$$

Jetzt wenden wir die Regel von Sarrus an:

$$4\times\left|\begin{matrix} a & 2 & (3-a) \\ 2 & 4 & a \\ (-1) & (a-3) & (2-a) \end{matrix}\right|\begin{matrix} a & 2 \\ 2 & 4 \\ (-1) & (a-3) \end{matrix}\quad 4\times\begin{pmatrix} (a\times 4\times (2-a)) + (2\times a\times (-1)) + \\ ((3-a)\times 2\times (a-3)) - ((3-a)\times 4\times(-1)) - \\ (a\times a\times(a-3)) - (2\times 2\times(2-a)) \end{pmatrix}$$

$$1\times\left|\begin{matrix} (a-1) & 2 & (3-a) \\ (a+3) & 4 & a \\ a & (a-3) & (2-a) \end{matrix}\right|\begin{matrix} (a-1) & 2 \\ (a+3) & 4 \\ a & (a-3) \end{matrix}\quad 1\times\begin{pmatrix} ((a-1)\times 4\times(2-a)) + (2\times a\times a) + \\ ((3-a)\times (a+3)\times (a-3))-((3-a)\times 4\times a) - \\ ((a-1)\times a\times(a-3)) - (2\times(a+3)\times(2-a)) \end{pmatrix}$$

$$3\times\left|\begin{matrix} a & 2 & (3-a) \\ 2 & 4 & a \\ (-1) & (a-3) & (2-a) \end{matrix}\right|\begin{matrix} a & 2 \\ 2 & 4 \\ (-1) & (a-3) \end{matrix}\quad 3\times\begin{pmatrix} ((a-1)\times 2\times(2-a)) + (a\times a\times a) + \\ ((3-a)\times (a+3)\times (-1))-((3-a)\times 2\times a) - \\ ((a-1)\times a\times(-1)) - (a\times(a+3)\times(2-a)) \end{pmatrix}$$

$$1\times\left|\begin{matrix} (a-1) & a & 2 \\ (a+3) & 2 & 4 \\ a & (-1) & (a-3) \end{matrix}\right|\begin{matrix} (a-1) & a \\ (a+3) & 2 \\ a & (-1) \end{matrix}\quad 1\times\begin{pmatrix} ((a-1)\times 2\times(a-3)) + (a\times 4\times a) + \\ (2\times (a+3)\times (-1))-(2\times 2\times a) - \\ ((a-1)\times 4\times(-1)) - (a\times(a+3)\times(a-3)) \end{pmatrix}$$

$4\times((8a-4a^2)+(-2a)+(12a-18-2a^2)-(-12+4a)-(a^3-3a^2)-(8-4a))+$
$1\times((12a-4a^2-8)+2a^2+(9a-27-a^3+3a^2)-(12a-4a^2)-(a^3-4a^2+3a)-(12-2a-2a^2))+$
$3\times((6a-2a^2-4)+a^3+(a^2-9)-(6a-2a^2)-(a-a^2)-(6a-a^3-a^2))+$
$1\times((2a^2-8a+6)+4a^2+(-2a-6)-4a-(-4a+4)-(a^3-9a))$
=
$4\times(8a-4a^2-2a+12a-18-2a^2+12-4a-a^3+3a^2-8+4a)+$
$1\times(12a-4a^2-8+2a^2+9a-27-a^3+3a^2-12a+4a^2-a^3+4a^2-3a-12+2a+2a^2)+$
$3\times(6a-2a^2-4+a^3+a^2-9-6a+2a^2-a+a^2-6a+a^3+a^2)+$
$1\times(2a^2-8a+6+4a^2-2a-6-4a+4a-4-a^3+9a)$
=
$4\times(18a-3a^2-14-a^3)+$
$1\times(8a+11a^2-47-2a^3)+$
$3\times(-13+2a^3+3a^2-7a)+$
$1\times(6a^2-a-4-a^3)$
=
$72a-12a^2-56-4a^3+8a+11a^2-47-2a^3-39+6a^3+9a^2-21a+6a^2-a-4-a^3$
$= 58a+14a^2-146-a^3$

Lösen der kubischen Gleichung $-a^3+14a^2+58a-146$

Die kubische Gleichung wird zunächst durch Division mit -1 auf die Normalform
$x^3 + rx^2 + sx + t = 0$ gebracht.

$$a^3-14a^2-58a+146=0$$

Durch die Substitution $x = y - r/3$ wird die Gleichung in eine reduzierte Form
$y^3 + py + q = 0$ gebracht, in der kein quadratisches Glied mehr auftritt.

$$(y + 4{,}666666666666667)^3 - 14(y + 4{,}666666666666667)^2 - 58(y + 4{,}666666666666667) + 146 = 0$$

Die neuen Koeffizienten können bequemer auch direkt berechnet werden:

$p = s - r^2/3 = -123{,}33333333333333$
$q = 2r^3/27 - rs/3 + t = -327{,}925925925926$

$$y^3 - 123{,}33333333333333y - 327{,}925925925926 = 0$$

Aus der Gleichung liest man also ab:

$p = -123{,}33333333333333$ $q = -327{,}925925925926$

Nun muß der Wert $R = (q/2)^2+(p/3)^3$ betrachtet werden.

Ist $R > 0$, so hat die kubische Gleichung eine reelle und zwei komplexe Lösungen,
ist $R = 0$, hat sie drei reelle Lösungen, von denen zwei zusammenfallen,
und im Falle $R < 0$ drei verschiedene reelle Lösungen.

Für die ersten beiden Fälle verwendet man die Lösungsformel von Cardano/Tartaglia,
im dritten Fall, dem sogenannten "casus irreducibilis", löst man mithilfe
trigonometrischer Funktionen.

Im Falle dieser Gleichung ist R = -42598,999999999985.

Da R < 0, liegt der casus irreducibilis vor. Man erhält die Lösungen mit
y = 2·kubikwurzel(u)·cos(w/3 + v), wobei u = sqr(-(p/3)³) und cos(w) = -q/(2u) ist,
und v die Werte 0, 120° und 240° annimmt.

cos(w) = 0,6220237051937111   u = 263,5960038080888

y_1 = 12,2515100020506

y_2 = -9,40580230793627

y_3 = -2,845707694114339

Die Substitution x = y - r/3 wird durch Subtraktion von r/3 rückgängig gemacht.
r=-14 ist der quadratische Koeffizient der kubischen Gleichung.
Damit ergeben sich, der Größe nach geordnet, diese Lösungen:

x_1 = -4,739135641269605

x_2 = 1,820958972552339

x_2 = 16,91817666871727

----------- Test --------------

$$\begin{vmatrix} (1{,}82096-1) & 1{,}82096 & 2 & (3-1{,}82096) \\ 1{,}82096+3 & 2 & 4 & 1{,}82096 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1{,}82096 & (-1) & (1{,}82096-3) & (2-1{,}82096) \end{vmatrix}$$

$$\det \begin{vmatrix} 0{,}82096 & 1{,}82096 & 2 & 1{,}17904 \\ 4{,}82096 & 2 & 4 & 1{,}82096 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1{,}82096 & (-1) & (-1{,}17904) & 0{,}17904 \end{vmatrix} = -0{,}0051027079$$